6 DISTRIBUSI PELUANG

6.1. PEUBAH ACAK (VARIABEL ACAK)

Misalkan dalam suatu percobaan dengan satu mata uang yang dilantunkan sebanyak tiga kali. Maka ruang kejadiannya adalah :

S ={MMM, MMB, MBM, MBB, BBM, BMB, BBB}

M = Muncul muka

B = Muncul belakang

Bila yang diperukan adalah jumlah muka yang muncul dalam percobaan itu, maka yang muncul dalam percobaan itu, maka dapat diperoleh daftar berikut :

jumlah muka yang muncul	frekuensi
0	1
1	3
2	3
3	1

Bila 0, 1, 2, dan 3 yang menyatakan jumlah muka yang muncul merupakan peubah acak. Jadi, peubah acak adalah suatu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang kejadian (ruang sampel). Biasanya peubah acak dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X, sedangkan harganya dinyatakan dengan huruf kecilnya x.

Dalam statistika, dikenal 2 macam peubah acak, yang pertama adalah peubah acak diskrit.

Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau banyaknya dapat dinyatakan dengan bilangan bulat, maka ruang sampel (ruang kejadian) ini disebut diskret. Perubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah peubah acak diskrit.

Dalam hal ini, perubahan yang dihasilkan dari percobaan pelemparan dadu, mata uang dan lain-lain adalah diskrit. Umumnya, peubah acak diskrit dihasilkan dari hasil perhitungan (menghitung).

Sedangkan peubah acak lainnya adalah kontinu. Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyak dan sama banyak dengan banyak titik pada garis bilangan maka ruang sampel itu disebut kontinu. Peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah perubah acak kontinu.

Umumnya peubah acak kontinu dihasilkan dari hasil pengukuran (mengukur) seperti : tinggi badan, berat, suhu, jarak dan lain sebagainya .

6.2. DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Pada percobaan dengan satu mata uang yang dilemparkan sebanyak 3 kali, hasil percobaaannya dapat dilihat dari daftar berikut

m	frekwensi	P(M = m)
0	1	1/8
1	3	3/8
2	3	1/8
3	1	1/8
jumlah	8	1

M = kejadian muncul muka

Umumnya, harga P (M = m) sering disebut sebagai distribusi peluang diskrit. Biasanya pula peubah acak x dinyatakan dalam bentuk fungsi, f (x), g (x) dan seterus-nya

Jadi $P(X = x) = f(x)$

$P(X = 3) = f(3)$

Fungsi f (x) adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila, untuk setiap x yang mungkin berlaku :

1. $f(x) >= 0$

2. $\sum_{x} f(x)\, dx = 1 \quad \sum_{x} f(x)\, dx = 1$

3. $p(X = x) = f(x)$

Contoh 6.1.

Hitunglah peluang jumlah bilangan yang muncul bila dua dadu dilantunkan

Jawab :

Jika 2 dadu dilantunkan, maka jumlah mata yang muncul bisa digambarkan sebagai berikut:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Misalkan X peubah acak dengan nilai x, maka P (X = 3) = 2/36, P (X = 2) = 1/36

Sehingga diperoleh distribusi peluang sebagai berikut :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Untuk peubah acak diskrit, kita dapat menentukan ekspektasinya sebagai berikut :

$$E(x) = \sum x_i P(x_i) \quad \text{.........} 6(1)$$

Contoh 6.2

Pengamatan menunjukkan bahwa banyak kendaraan yang melalui sebuah tikungan setiap menit mengikuti distribusi sebagai berikut :

banyak kendaraan	0	1	2	3	4	5	6	7	8
peluang	0,01	0,05	0,10	0,28	0,22	0,18	0,08	0,05	0,03

Dari data diatas tampak bahwa peluang paling sedikit 3 kendaraan yang melalui tikungan tersebut adalah :

$$P(3X) = 1 - [P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)]$$
$$= 0,84$$

Sedangkan rata-rata kendaraan yang melalui tikungan teresbut tiap menit adalah :

$$E(X) = 0(0,01)+1(0,05)+2(0,1)+3(0,28)+4(0,22) + 5(0,18) + 6(0,08)+ 7(0,05)+8(0,03) = 3,94$$

atau, terdapat 394 kendaraan tiap 100 menit.

Sedangkan ekspektasi untuk perubah acak kontinu X ditentukan oleh

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad \text{.........} 6(2)$$

6.3. DISTRIBUSI KUMULATIF PERUBAH ACAK DISKRIT

Distribusi peluang kumulatif F (x) suatu perubah acak X dengan fungsi peluang f (x) dinyatakan oleh :

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad \text{..........} 6(3)$$

Contoh 6.3.

Pada percobaan dengan satu mata uang yang dilembarkan sebanyak 3 kali, diperoleh perubah acak M (kejadian muncul muka) dengan distribusi peluang sebagai berikut :

m	frekuensi	P(M = m)
0	1	1/8
1	3	3/8
2	3	1/8
3	1	1/8
jumlah	8	1

Maka distribusi peluang kumulatifnya sebagai berikkut :

$F(0) = f(0) = 1/8$

$F(1) = f(0) + f(1) = 4/8$

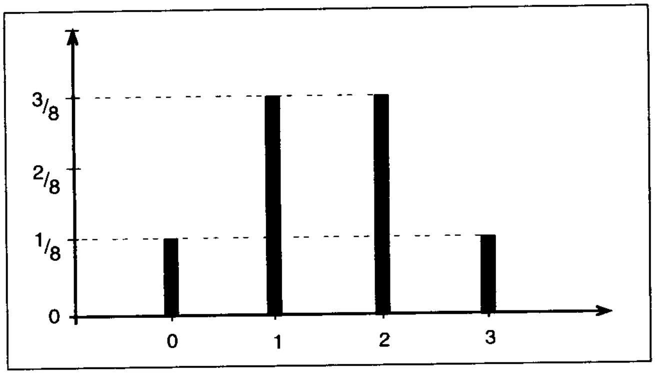
$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 7/8$

$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

Jadi $F(X) = 0$ untuk $x < 0$

$1/8$ untuk $0<x<1$

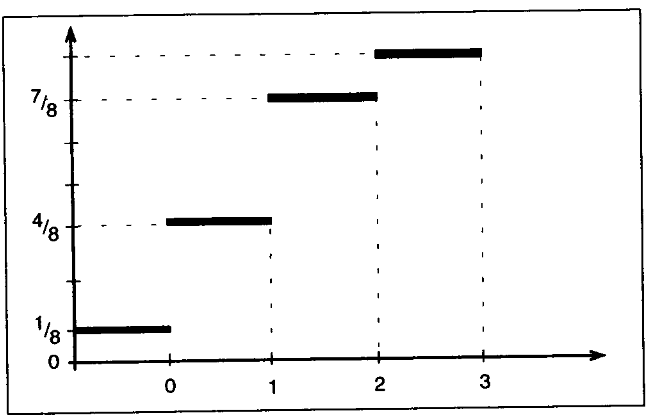
Untuk memudahkan melihat distribusi peluang, biasanya dinyatakan dalam bentuk grafik titik (x, f(x) seperti nampak pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1. Diagram batang

Jika distribusi peluang kumulatifnya digambarkan akan terlihat bentuk sebagai berikut :

F(X) = 0 untuk x < 0
1/8 untuk 0 x < 1
4/8 untuk 1 x < 2
7/8 untuk 2 x < 3
1 untuk x 3



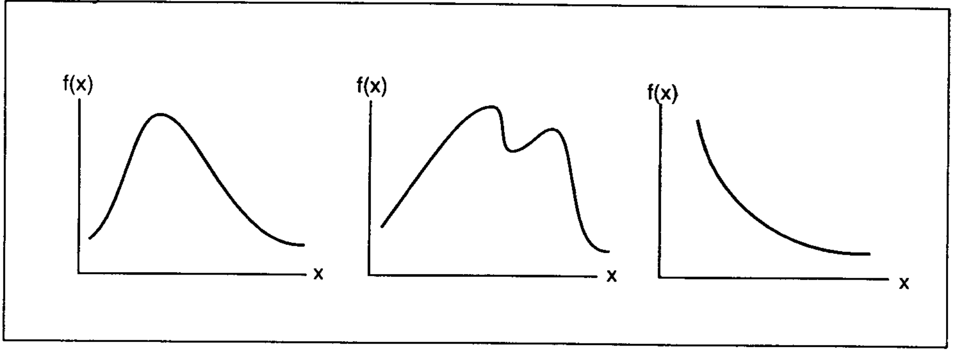
Gambar 6.2. Distribusi Kumulatif

6.4. DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

Pada peubah acak kontinu , peluang pada setiap titik x adalah nol. Oleh karena itu, distribusi peluangnya tidak disajikan dalam bentuk tabel.

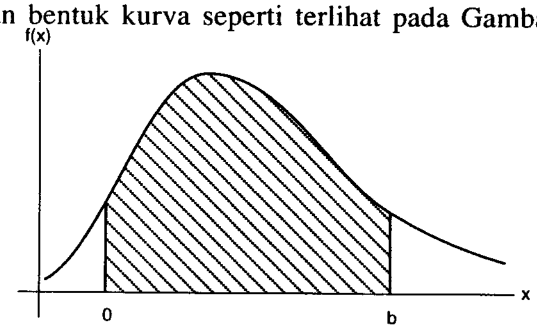
Misalnya dalam sebuah pengukuran tinggi badan, tercatat 163,5 cm, 164,3 cm, 163,2 cm, 170,1 cm dan seterusnya . Berapa peluangnya memilih seorang dengan tingggi badan 164,0 cm . Peluang kejadian tersebut sangat kecil, dan dapat dianggap sebagai nol.

Distribusi peluang x peubah acak kontinu dinyatakan dengan fungsi f (x). Dalam hal ini f(x) biasanya disebut fungsi padat (densitas). Jika digambarkan dalam bentuk grafik, fungsi densitas peubah acak kontinu umumnya berbentuk:



Gambar 6.3. Beberapa bentuk kurva peubah acak kontinu

Peluang kejadian pada fungsi densitas perubah acak kontinu dilukiskan oleh luas daerah antara kurva f (x) dan sumbu X . Misalkan terdapat fungsi densitas dengan bentuk kurva seperti terlihat pada Gambar 6.4.



Gambar 6.4. Fungsi Densitas.

Berdasarkan fungsi densitas tersebut maka, peluang x mempunyai nilai antara a dan b adalah luas daerah yang diasir antara x = a dan x = b.

Secara umum, untuk sebuah fungsi densitas kontinyu f (x), berlalu :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

3. $P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Contoh 6.4.

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = x^2/\,3\ ,\ -1 < x < 2$$
$$= 0 \text{ untuk lainnya}$$

1. Buktikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi densitas
2. Hitunglah $P(0 < x < 1)$

Jawab :

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\, dx = 1$

$$= \frac{1}{9} x^2 \Big]_{-1}^{2} = 8/9 + 1/9 = 1$$

2. $P(0 < \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3}\, dx = \left. \frac{x^2}{9} \right]_0^2 = 1/9$

Sedangkan, distribusi kumulatif F(x) suatu perubah acak kontinu x dengan fungsi densitas $f_x(x)$ diberikan oleh

$$\mathbf{F(x) = P(X{=}x) = \int_{-\infty} f(t)dt = \text{..} 6(3)}$$

Akibat persamaan diatas, maka

P(a<x<b) = F(b)– F (a)

dan f(x) = dF(x)/dx

Jika fungsi turunan ini terdefinisi

Contoh 6.5.

Carilah F(x) dari fungsi densitas pada contoh 6.2.dan carilah P(0<x 1)

Jawab

$$F(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\, dt = \left. \frac{t^2}{9} \right]_{-1}^{x} = \frac{x^3}{9}$$

jadi

Hitunglah P(0<x 1) = F(1) - F(0) = 1/9

Contoh 6.6.

Masa pakai suatu alat, dinyatakan dengan x, dapat ditentukan oleh dungsi densitas eksponensial dengan persamaan :

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e \qquad , x \geq 0$$

1. Tentukan peluang sebuah alat dapat dipakai antara 3 sampai 3,5 bulan
2. Tentukan rata-rata masa pakainya.

Jawab :

1. $$P(3 < x < 3{,}5) = \int_{3}^{3{,}5} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = -e^{-\frac{1}{2}}\Big]_{3}^{3{,}5} = 0{,}0493$$

Peluang masa pakai alat antara 3 sampai 3,5 bul;an adalah 0,0493

2. karena

   $x \geq 0$

   $$e(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\, x e^{-\frac{1}{2}x}\, dx = -2e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{0}^{\infty}$$

   $$= 2$$

   maka rata-rata masa pakai alat itu selama 2 bulan

6.5. TEOREMA CHEBYSHEV

Varians suatu peubah acak akan memberikan gambaran mengenai penyebaran pengamatan disekitar rata-rata. Varians atau simpangan baku kecil, maka data hasil pengamatan akan mengelompok disekitar rata-rata. Karena itu, peluang suatu peubah acak akan mendapat nilai dalam suatu selang tertentu disekitar rata-rata akan lebih besar dari pada peubah acak dengan varians besar.

Berkaitan dengan hal ini, Chebyshev memberikan taksiran tentang peluang suatu peubah acak mendapat nilai dalam jarak dan simpangan baku dari harga rata-rata.

$$p\ [\ |X-C| \geq \varepsilon\ ] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Bentuk-bentuk yang ekivalen dengna bentuk diatas adalah

a. Berdasarkan komplemen suatu kejadian

$$P(|X-C| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{s^2}{\varepsilon^2}$$

b. Jika $C = \mu$, maka

$$P(|X-\mu\ | \geq \varepsilon\ ) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

c. Jika $\varepsilon = k\sigma$, maka

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

atau berdasarkan kejadian komplemen

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ini dinamakan teorema Chebyskev

Peluang bahwa peubah acak X mendapat nilai dalam k simpangan baku dari rata-rata adalah paling sedikit $(1 - 1/k^2)$, dinyatakan oleh :

$$\mathbf{P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}} \quad \text{..}\mathbf{6(4)}$$

Ini dinamakan teorema Chebyshev.

Contoh 6.7.

Sebuah peubah acak X mempunyai rata-rata $\mu = 8$ dan variand $\sigma = 9$, sedangkan distribusinya tidak diketahui. Hitunglah :

1. $P(-4 < x < 20)$
2. $P(|x - 8| \geq 6)$

Jawab

1. $P(-4 < x < 20) = P(8-4(3) < X < 8 + 4(3)) \geq 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

2. $$\begin{aligned} P(|X-8| \geq 6) &= 1 - P(|X-8)| < 6) \\ &= 1 - P(-6 < X-8 < 6) \\ &= 1 - P(8-(2)(3) < X < 8 + (2)(3)) \\ &\leq 1/4 \end{aligned}$$

6.6. SOAL LATIHAN.

1. Misalkan dilakukan undian dengan 4 buah mata uang sekaligus. Berapa peluang akan muncul :
   a. 4 muka gambar
   b. 2 muka angka
   c. paling sedikit tiga muka gambar

2. Dari tumpukan kartu 'bridge' yang tebal dikocok dengan baik lalu diambil 2 lembar kartu. Tentukan peluangnya bahwa kartu itu akan Ace jika kartu pertama :
   a. disempan lagi
   b. tidak disimpan lagi

3. Sebuah kotak berisi 5 bola merah dan 7 bola putih dan sebuah kotak lagi berisi 8 bola merah dan 2 bola putih. Kecuali warna, kesemua karakteristik bola itu identik. Sebuah bola diambil dari satu kotak. Berapa peluangnya bahwa bola itu berwarna merah ?

4. Setiap unit barang diselesaikan oleh 4 pegawai yang mengerjakan bagian yang berbeda-beda. Dari pengalaman ternyata bahwa terdapat hasil kerja yang ada cacatnya : 5% oleh pegawai I, 7% oleh pegawai II, 2 % oleh pegawai III, 4% oleh pegawai IV. Tentukan berapa % barang produksi yang baik ?

5. Semacam barang dihasilkan oleh mesin secara berurutan. Kerusakan proses produksi barang oleh mesin itu sebesar 5%. Untuk 5 barang yang dihasilkan secara berurutan, tentukan peluangnya akan terdapat :
   a. semua barang baik
   b. satu barang rusk
   c. semua barang rusak

6. Sepuluh % dari penderita semacam penyakit ternyata sembuh. Bagaimanakah peluangnya untuk 5 orang penderita penyakit semua tidak sembuh ?