

5

BEBERAPA DISTRIBUSI TEORITIS

A. DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

1. Distribusi Diskrit Uniform

Distribusi Diskrit Uniform juga disebut sebaran peluang seragam, yaitu bila peubah acak x mempunyai nilai-nilai x_1, x_2, \dots, x_k dengan probabilitas yang sama maka distribusi probabilitas uniformnya diberikan oleh,

$$f(x,k) = 1/k, \quad \dots\dots\dots(1)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Teladan 1. Jika sebuah dadu dilemparkan dan setiap unsur ruang contoh adalah $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, serta mempunyai peluang yang sama untuk muncul yaitu $1/6$. Oleh karena itu diperoleh distribusi uniformnya adalah :

$$f(x;6) = 1/6, \text{ untuk } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Teladan 2. Misalkan seorang staf dipilih secara acak, dari 10 staf yang tersedia, untuk mengawasi suatu proyek tertentu. Bila para staf itu dinomori dari 1 sampai

dengan 10, maka distribusinya adalah uniform dengan

$$f(x;10) = 1/10, \text{ untuk } x = 1, 2, 3, \dots, 10$$

2. Distribusi Binomial

Suatu percobaan sering kali terdiri atas ulangan-ulangan, dan masing-masing mempunyai dua kemungkinan hasil yang dapat diberi nama **berhasil** atau **gagal**. Misalnya saja dalam pelemparan sekeping uang logam sebanyak 5 kali, hasil setiap ulangan mungkin muncul sisi gambar atau sisi angka. Dan salah satu diantara keduanya ditentukan sebagai 'berhasil'. Begitu pula, bila 5 kartu diambil berturut-turut. Untuk kartu merah diberi label 'berhasil' atau 'gagal' bila yang terambil adalah hitam.

Bila setiap kartu dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya, maka kedua percobaan yang dilakukan diatas mempunyai ciri-ciri yang sama, yaitu bahwa ulangan-ulangan tersebut bersifat bebas dan peluang keberhasilan setiap ulangan tetap sama yaitu sebesar 1/2. Percobaan semacam ini dinamakan **percobaan binom**. Perhatikan bahwa dalam percobaan pengambilan kartu tersebut, peluang keberhasilan dalam setiap ulangan akan berubah bila kartu tidak dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya; karena peluang terambilnya kartu merah pada pengambilan pertama adalah 1/2, sedangkan pada pengambilan yang kedua peluang itu bersifat bersyarat, bernilai 26/51 atau 25/51, bergantung pada hasil pengambilan pertama. Bila demikian halnya percobaan ini bukan lagi bersifat binom. Untuk lebih ringkasnya dapat dilihat pada definisi berikut.

Jika suatu ulangan binomial mempunyai peluang keberhasilan p dan peluang kegagalan $q = 1 - p$, maka distribusi probabilitas bagi peubah acak binomial X , yaitu banyaknya keberhasilan dalam n ulangan bebas, adalah

$$b(x;n,p) = C_n^x p^x q^{n-x} \dots\dots\dots(2)$$

untuk $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

Teladan 3. Tentukan peluang mendapat kan tepat tiga bilangan 2 bila sebuah dadu setimbang dilemparkan 5 kali.

Jawab. Peluang keberhasilan setiap ulangan yang bebas ini adalah 1/6 dan peluang kegagalan adalah 5/6. Dalam hal ini munculnya bilangan 2 dianggap keberhasilan. Maka

$$\begin{aligned} b [x;5,1/6] &= C_5^3 (1/6)^3 (5/6)^2 \\ &= \frac{5!}{3! 2!} \frac{5^2}{6^5} \\ &= 0.032 \end{aligned}$$

Teladan 4. Di sebuah bagian kota, keperluan uang untuk membeli ganja atau sejenisnya ternyata melatar belakangi 75% peristiwa pencurian yang terjadi. Berapa peluang bahwa tepat 2 diantara 4 kasus pencurian berikutnya dilatarbelakangi oleh keperluan uang untuk membeli ganja?

Jawab. Dengan anggapan bahwa kasus pencurian itu bersifat bebas dan $p = 3/4$ maka

$$\begin{aligned} b [x; 4, 3/4] &= C_4^2 (3/4)^2 (1/4)^2 \\ &= \frac{4!}{2! 2!} \frac{3^2}{4^4} \\ &= 0.211 \end{aligned}$$

Selain masalah diatas, mungkin ada masalah yang menghendaki dihitung probabilitas $P(X < r)$ atau $P(a \leq X \leq b)$. Untuk masalah seperti ini dapat diselesaikan dengan menggunakan tabel A2 yang terdapat pada lampiran.

Teladan 5. Peluang seseorang sembuh dari suatu penyakit darah adalah 0.4. Bila 15 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa peluang bahwa :

- sekurang-kurangnya 10 orang dapat sembuh
- Ada 3 sampai 8 orang yang sembuh
- tepat 5 orang yang sembuh

Jawab. a. Misalkan X adalah banyaknya orang yang sembuh, maka

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^9 b(x; 15, 0.4) \\ &= 1 - 0.9662 \\ &= 0.0338 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P(3 \leq X \leq 8) &= \sum_{x=3}^8 b(x; 15, 0.4) \\ &= \sum_{x=0}^8 b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^2 b(x; 15, 0.4) \\ &= 0.9050 - 0.0271 \\ &= 0.8779 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c. \quad P(X = 5) &= b(5; 15, 0.4) \\
&= \sum_{x=0}^5 b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^4 b(x; 15, 0.4) \\
&= 0.4032 - 0.2173 \\
&= 0.1859
\end{aligned}$$

Nilai tengah (rata-rata) dan ragam bagi distribusi binom $b(x; n, p)$ adalah

$$\mu = np \quad \dots\dots (3)$$

$$\sigma^2 = npq \quad \dots\dots(4)$$

Teladan 6. Dari teladan diatas tentukan nilai rata-ratanya dan ragamnya

Jawab.

$$\begin{aligned}
\mu &= np = (15)(0.4) = 6 \\
s^2 &= npq = (15)(0.4)(0.6) = 3.6
\end{aligned}$$

Selain itu ada distribusi binom lainnya, yaitu distribusi binom negatif. Bila ulangan yang bebas dan berulang-ulang dapat menghasilkan keberhasilan dengan peluang p dan kegagalan dengan peluang $q = 1 - p$, maka distribusi probabilitas bagi peubah acak X , yaitu banyaknya ulangan sampai terjadinya k keberhasilan, diberikan menurut rumus

$$b^*(x; k, p) = C_{x-1}^{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \dots\dots\dots (5)$$

untuk $x = k, k + 1, k + 2, \dots$

Teladan 7. Hitunglah peluang seseorang yang melemparkan 3 uang logam akan mendapatkan semua sisi gambar atau semua sisi angka untuk yang kedua kalinya pada lemparan kelima ?

Jawab. Dengan menggunakan distribusi binom negatif dengan $x = 5, k = 2$, dan $p = 1/4$, didapat

$$\begin{aligned}
b^*(5; 2, 1/4) &= C_4^1 (1/4)^2 (3/4)^3 \\
&= \frac{37}{256}
\end{aligned}$$

3. Distribusi Hipergeometrik

Bila dalam populasi N benda, k benda diantaranya diberi label 'berhasil' dan $N - k$ benda lainnya diberi label 'gagal', maka distribusi probabilitas bagi peubah acak hipergeometrik X , yang menyatakan banyaknya keberhasilan dalam contoh acak berukuran n , adalah

$$h(x;N,n,k) = \frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n} \dots\dots\dots(6)$$

Untuk $x = 0, 1, 2, 3, \dots, k$

Teladan 8. Bila 5 kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge, berapa probabilitas diperoleh 3 kartu hati.

Jawab. Dengan menggunakan sebaran hipergeometrik untuk $n = 5, N = 52, k = 13,$ dan $x = 3,$ maka probabilitas memperoleh 3 kartu hati adalah.

$$h(3;52,5,13) = \frac{C_{13}^3 C_{39}^2}{C_{52}^5} = 0.0815$$

Sedangkan Nilai rata-rata dan ragam bagi distribusi hipergeometrik $h(x;N,n,k),$ adalah

$$\mu = \frac{n k}{N} \dots\dots\dots (7)$$

$$s^2 = \frac{N-n}{N-1} n \frac{k}{N} \left\{ 1 - \frac{k}{N} \right\} \dots\dots (8)$$

Teladan 9. Tentukan μ dan s^2 dari teladan 8.

Jawab.

$$\mu = \frac{(5)(13)}{52} = 1.25$$

$$\sigma^2 = (47/51)(5)(13/52)(1-13/52) = 705/816$$

4. Distribusi Poisson

Distribusi probabilitas bagi peubah acak Poisson $X,$ yang menyatakan banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu, adalah

$$p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \dots\dots\dots (9)$$

untuk $x = 1, 2, \dots$

sedangkan dalam hal ini μ adalah rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau dalam daerah yang dinyatakan, dan $e = 2.71828\dots$.

Teladan 10. Rata-rata banyaknya tikus per acre dalam suatu ladang seluas 5 acre diduga sebesar 10. Hitung probabilitas bahwa dalam suatu luasan 1 acre terdapat lebih dari 15 tikus.

Jawab. Misalkan X adalah banyaknya tikus per acre. Maka dengan menggunakan Tabel A3. didapat

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= 1 - P(X \leq 15) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x; 10) \\ &= 1 - 0.9513 \\ &= 0.0487 \end{aligned}$$

Distribusi Binom dan Poisson memiliki histogram yang bentuknya hampir sama bila n besar dan p kecil (dekat dengan nol). Oleh karena itu bila kedua kondisi itu dipenuhi, distribusi Poisson dengan $\mu = np$ dapat digunakan untuk menghampiri probabilitas binom.

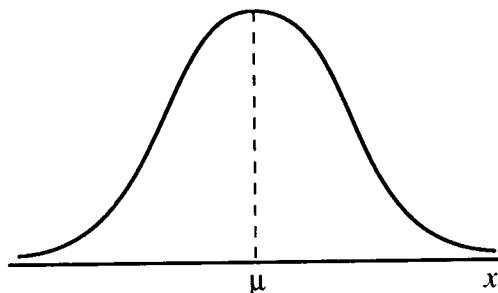
Teladan 11. Misalkan bahwa secara rata-rata 1 Orang diantara 1000 orang adalah pencandu alkohol. Hitung probabilitas bahwa dalam suatu contoh acak 8000 orang terdapat kurang dari 7 pencandu alkohol.

Jawab. Sesungguhnya ini merupakan percobaan binom dengan $n = 8000$ dan $p = 0.001$. Karena p sangat dekat dengan nol dan n sangat besar, maka dapat dihampiri dengan distribusi Poisson dengan $\mu = (8000)(0.001) = 8$. Oleh karena itu, jika X menyatakan banyaknya pencandu alkohol, akan diperoleh

$$\begin{aligned} P(X < 7) &= \sum_{x=0}^6 b(x; 8000, 0.001) \\ &= \sum_{x=0}^6 p(x; 8) \\ &= 0.3134 \end{aligned}$$

B. DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Salah satu contoh paling penting dari suatu distribusi probabilitas kontinu adalah distribusi Normal. Grafiknya, yang disebut kurva normal, adalah kurva yang berbentuk genta seperti pada Gambar.



Gambar 1. Kurva normal

Bila X adalah suatu peubah acak normal dengan nilai rata-rata μ dan ragam σ^2 , maka persamaan kurva normalnya adalah

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2 \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(10)$$

untuk $-\infty < x < \infty$, sedangkan dalam hal ini $\pi = 3.14159\dots$ dan $e = 2.71828\dots$

Jika peubah X dinyatakan dalam satuan baku $z = (X - \mu)/\sigma$, persamaan diatas digantikan oleh bentuk baku

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2} \quad \dots\dots\dots(11)$$

Beberapa sifat dari kurva normal adalah:

- a. Modusnya, yaitu titik pada sumbu mendatar yang membuat fungsi mencapai maksimum, terjadi pada $x = \mu$.
- b. Kurvanya setangkep terhadap suatu garis tegak yang melalui nilai tengah μ .
- c. Kurva ini mendekati sumbu mendatar secara asimtotik dalam kedua arah bila semakin jauh dari nilai tengahnya
- d. Luas daerah yang terletak di bawah kurva tetapi di atas sumbu mendatar sama dengan 1.

Jika dalam penyelesaian masalah yang berkaitan dengan distribusi normal, dan ingin dihindari penggunaan rumus yang menggunakan kalkulus integral, dapat digunakan tabel A4.

Hal ini dimungkinkan karena setiap pengamatan yang berasal dari sembarang peubah acak normal X dapat ditransformasikan menjadi suatu nilai peubah acak normal Z dengan nilai rata-rata nol dan ragam satu. Ini dapat dilakukan melalui transformasi

$$Z = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \dots\dots\dots (12)$$

Distribusi peubah acak normal dengan nilai tengah nol dan simpangan baku satu disebut distribusi normal baku.

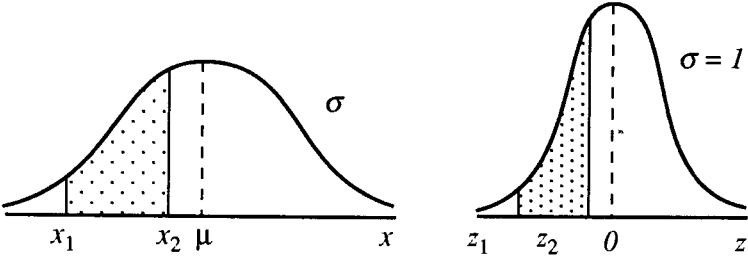
Bila X berada diantara $x = x_1$ dan $x = x_2$, maka peubah acak Z akan berada diantara nilai-nilai padanannya

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \text{ dan } Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Karena semua nilai X yang jatuh antara x_1 dan x_2 mempunyai nilai-nilai padanannya antara z_1 dan z_2 , maka luas daerah di bawah kurva X antara $x = x_1$ dan $x = x_2$ sama dengan luas daerah di bawah kurva Z antara $z = z_1$ dan $z = z_2$. Dengan demikian

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

Berarti sekarang banyaknya tabel luas kurva normal dikurangi menjadi hanya satu. Tabel A4 pada lampiran mencantumkan luas daerah di bawah kurva normal baku yang merupakan nilai $P(Z < z)$ untuk berbagai nilai z dari -3.49 sampai 3.49.



Gambar 2. Populasi normal asal dan hasil transformasi

Teladan 12. Untuk distribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$, hitunglah peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62.

Jawab. Nilai-nilai z padanan $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$ adalah

$$z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

$$z_2 = \frac{62 - 50}{10} = 1.2$$

Dengan demikian,

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$$

Dengan menggunakan tabel A4 diperoleh

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) &= P(-0.5 < Z < 1.2) \\ &= P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) \\ &= 0.8849 - 0.3085 \\ &= 0.5764 \end{aligned}$$

Bila X adalah suatu peubah acak binom dengan nilai tengah $\mu = np$ dan ragam $\sigma^2 = npq$, maka bentuk hampiran bagi distribusi

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad \dots\dots\dots(13)$$

untuk $n \rightarrow \infty$, adalah distribusi normal baku

Teladan 13. Peluang bahwa seorang pasien dapat sembuh dari suatu penyakit darah adalah 0.6. Bila 100 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa probabilitas bahwa kurang dari separuhnya akan dapat sembuh?

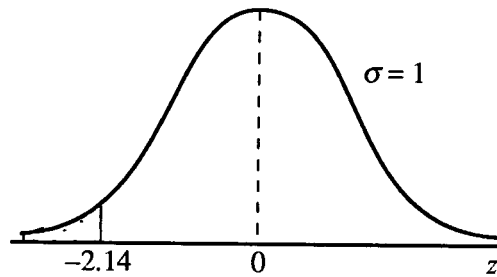
Jawab. Misalkan peubah acak X menyatakan banyaknya pasien yang dapat sembuh. Karena $n = 100$, maka kita akan mendapatkan hasil yang cukup teliti bila menggunakan hampiran kurva normal dengan

$$\begin{aligned} \mu &= np = (100)(0.6) = 60 \\ s &= \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 4.9 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan peluang yang dicari, harus dihitung luas daerah di sebelah kiri $x = 49.5$. Nilai padanan $x = 49.5$ adalah

$$z = \frac{49.5 - 60}{4.9} = -2.14$$

sehingga peluang bahwa yang sembuh kurang dari 50 pasien diberikan oleh daerah gelap dalam gambar 3. Dengan demikian



Gambar 3. Luas daerah bagi teladan 13

$$\begin{aligned} P(X < 50) &= \sum_{X=0}^{49} b(x ; 100, 0.6) \\ &= P(Z < -2.14) \\ &= 0.0162 \end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Cari probabilitas untuk mendapatkan tepat dua kali bilangan 4 bila sebuah dadu setimbang dilemparkan 4 kali ?
2. Sebuah panitia terdiri dari 7 orang diambil secara acak dari 4 wanita dan 6 pria. Tentukan peluang banyaknya 3 wanita yang terpilih ?
3. Seperti pada soal no. 2 , tetapi jika diinginkan hanya satu wanita yang terpilih maka tentukan probabilitasnya ?
4. Bila peubah acak X didefinisikan sebagai banyaknya sisi gambar yang muncul bila sebuah uang logam dilemparkan sekali, maka distribusi probabilitas yang dapat dipakai adalah :
 - a. Distribusi Probabilitas Binomial
 - b. Distribusi Probabilitas Uniform
 - c. a dan b benar
 - d. a dan b salah
5. Probabilitas seorang berhasil adalah $\frac{2}{3}$. Dari peserta ujian diambil secara acak 5 orang. Tentukan probabilitas semuanya berhasil
 - a. semuanya berhasil
 - b. sekurang-kurangnya satu orang berhasil
6. Tiga persen dari bola lampu yang diproduksi suatu perusahaan adalah rusak. Diambil sample 100 bola lampu. Tentukan probabilitas bola lampu tidak ada yang rusak ?
7. Dari sekelompok orang yang terdiri dari 60 orang, 5 orang lahir pada tanggal 29 february, secara acak dipilih 10 orang.
Untuk mencari probabilitas ada seorang yang lahir pada tanggal 29 february digunakan:
 - a. Distribusi Probabilitas Poisson
 - b. Distribusi Probabilitas Hypergeometrik
 - c. Distribusi Probabilitas Binom
 - d. Distribusi Probabilitas Seragam
8. Jika pada suatu percobaan dengan distribusi probabilitas binom dimana p dekat dengan $\frac{1}{2}$ dan n sangat besar, maka penyelesaiannya dapat didekati dengan :
 - a. Distribusi Probabilitas Binom negatif
 - b. Distribusi Probabilitas Normal
 - c. Distribusi Probabilitas Poisson
 - d. Distribusi Probabilitas Hypergeometris

9. Probabilitas bahwa seorang mahasiswa yang masuk STMIK Gunadarma akan menyelesaikan studinya tepat waktu adalah 0.4. Tentukan probabilitas bahwa dari antara 5 mahasiswa yang akan menyelesaikan studi tepat waktu
- tidak ada
 - seorang
 - paling sedikit seorang:
10. Hitunglah luas daerah di bawah kurva normal :
- antara $z = 0$ dan $z = 1.2$
 - antara $z = -0.68$ dan $z = 0$
 - antara $z = 0.81$ dan $z = 1.94$
11. Hitunglah peluang bahwa seseorang yang melemparkan sekeping uang logam setimbang memperoleh
- sisi gambar yang ketiga pada lemparan yang ketujuh
 - sisi gambar yang pertama pada lemparan yang keempat