3 DIFFERENSIAL KALKULUS DARI FUNGSI BEBERAPA VARIABEL

3.1. FUNGSI DARI BEBERAPA VARIABEL

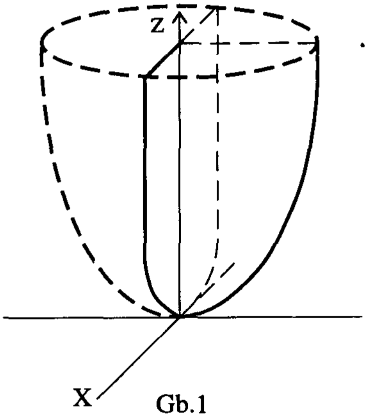
Jika untuk setiap titik (x,y) di bidang XY dikaitkan dengan suatu bilangan nyata z, maka dikatakan z sebagai fungsi dari x dan y, ditulis

$$z = F(x, y) \qquad \text{.......} \quad (3.1)$$

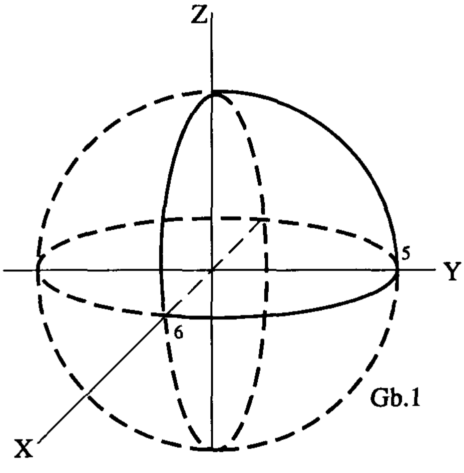
misal :
1. $z = x^2 + y^2$ .... (3.1.1)
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .... (3.1.2)
3. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ .... (3.1.3)
4. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 6$ .... (3.1.4)
5. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 6$ .... (3.1.5)
6. $x + 2y + 3z = 6$ .... (3.1.6)

$z = F(x,y)$ menggambarkan suatu permukaan benda (lengkung atau rata).

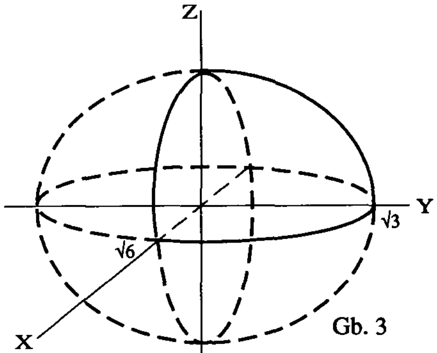
Pada persamaan (3.1.1) sampai 3.1.6) menggambarkan permukaan-permukaan Paraboloida, bola, Ellypsoida, Hyperbola daun 1, Hyperbola daun 2 dan bidang rata, seperti gambar di bawah berikut ini.



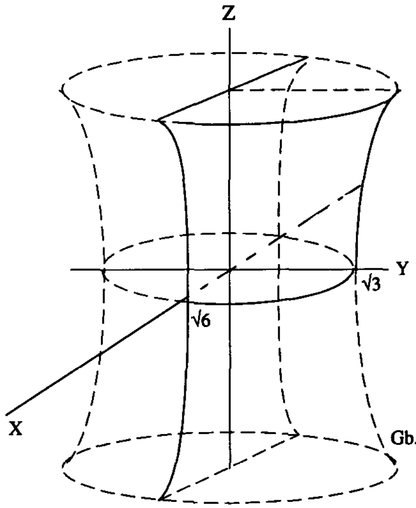
Gb.1



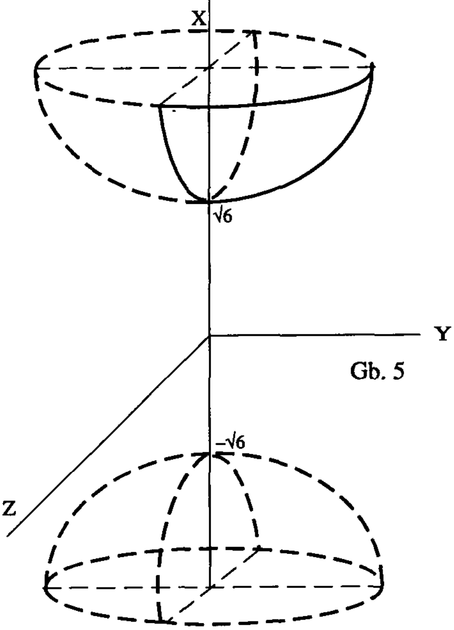
Gb.1



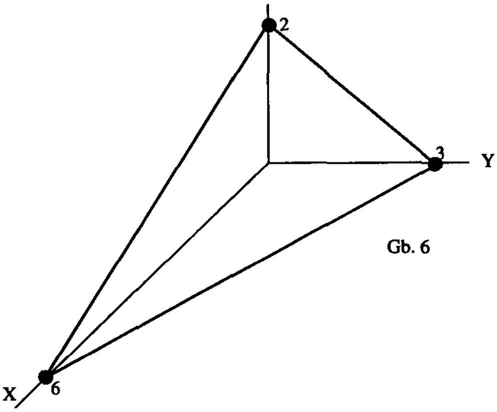
Gb. 3



Gb. 4



Gb. 5



Gb. 6

3.2. D O M A I N

Pada lazimnya fungsi $y = f(x)$ selalu didefinisikan pada interval $a \leq x \leq b$. Untuk fungsi $z = F(x,y)$ diperlukan konsep serupa, jadi didefinisikan pada daerah empat persegi panjang

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$

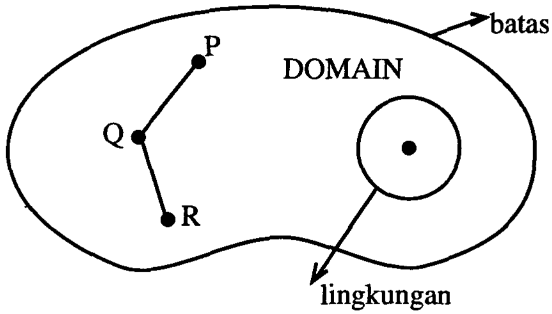
Masalah yang dihadapi adalah daerah yang berbentuk lingkaran, Ellyps dan sebagainya.

Untuk dapat mencakupi ini, perlu dirumuskan pengertian "domain".

Definisi:

Domain adalah himpunan terbuka yang bersifat untuk setiap 2 titik P dan Q dari himpunan dapat dihubungkan oleh garis patah yang seluruhnya terletak dalam himpunan.

Jelas himpunan titik-titik dalam lingkaran merupakan domain.



Gambar 7

Definisi :

Lingkungan, dari titik (x_1,y_1) diartikan sebagai himpunan titik-titik dalam lingkaran berpusat di (x_1,y_1) dan berjari-jari δ; dimana untuk setiap titik (x,y) dari lingkungan memenuhi.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < \delta^2$$

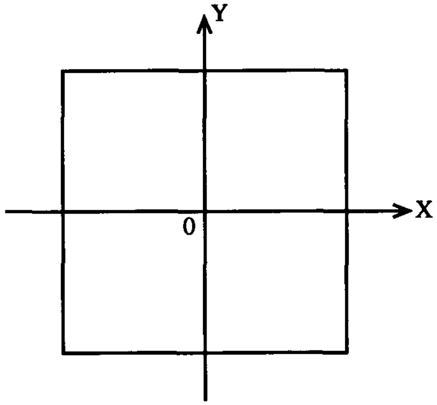
Definisi :

Seluruh himpunan yang dapat dicakupi dalam suatu lingkungan yang cukup besar disebut himpunan terbatas. Himpunan terbatas dapat terbuka atau tertutup.

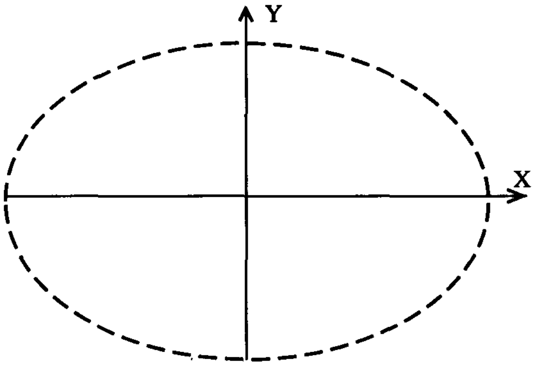
Misal :

1. $\left.\begin{array}{l} |x| \le 1 \\ |y| \le 1 \end{array}\right\}$ adalah himpunan titik-titik dari bujur sangkar yang tertutup dan terbatas.

2. $x^2 + 4y^2 < 1$ himpunan titik-titik dalam Ellyps yang terbatas dan terbuka.



Gambar 8



Gambar 9

Definisi :

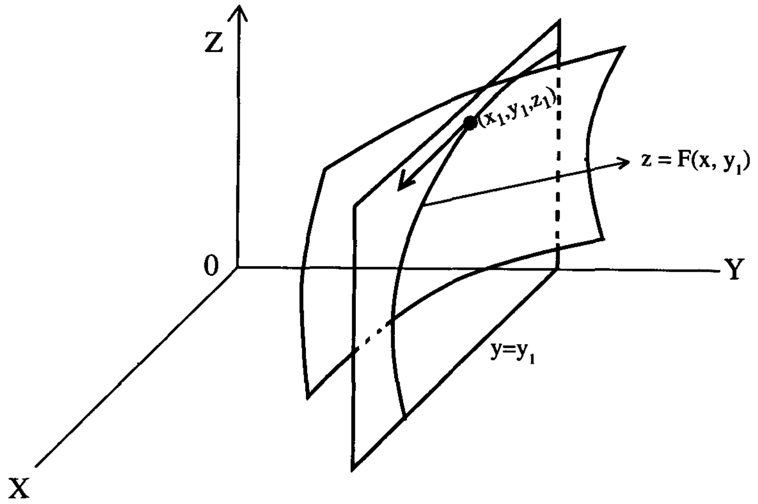
Kawasan adalah suatu himpunan terbuka ditambah dengan sebagian atau seluruh batas (himpunan tertutup)

misal : $x^2 + y^2 \le 4$.

3.3. TURUNAN PARSIAL

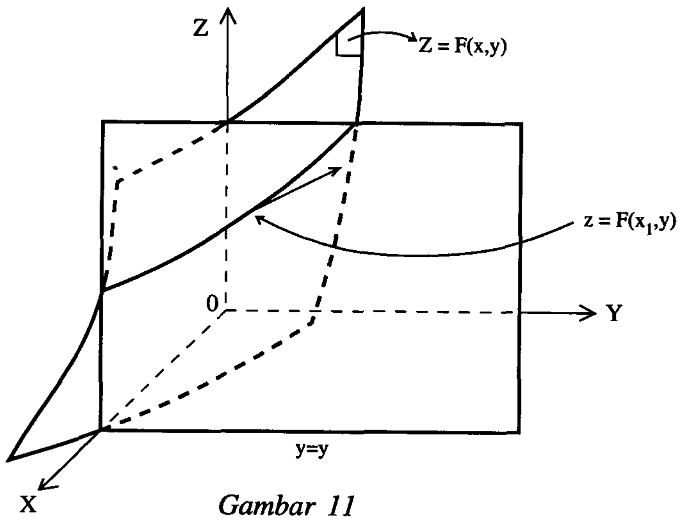
Misal $z = F(x,y)$ didefinisikan dalam suatu domain D di bidang XY.

Untuk $y = y_1$ = tetap, maka $z = F(x,y_1)$ menyatakan z sebagai suatu fungsi dari x saja dan $z = F(x,y_1)$ menggambarkan suatu kurva akibat perpotongan antara permukaan $z = F(x,y)$ dengan bidang $y=y_1$ yang sejajar dengan bidang XOZ (lihat gambar 10).



Gambar 10

Untuk $x = x_1$ = tetap, maka $Z = F(x_1, y)$ menyatakan z hanya merupakan fungsi dari y saja dan $z = F(x_1, y)$ menggambarkan kurva akibat perpotongan permukaan $z = F(x,y)$ dengan bidang $x = x_1$ yang sejajar dengan YOZ (gambar 11)



Gambar 11

Misal $z = F(x, y_1)$ didefinisikan pada interval $a < x < b$, maka turunan z terhadap x dititik $x = x_1$ (jika ada) disebut turunan parsiel z terhadap x dititik (x_1, y_1) dinyatakan dengan

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{(x_1,y_1)} = \lim_{4x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x}$$

dimana $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_{(x_1,y_1)}$ menyatakan arah garis singgung dititik (x_1, y_1, z_1) pada kurva

$Z = F(x, y_1)$ (lihat juga gambar 10)

Turunan z terhadap y dititik $x = x_1$ (jika ada) disebut turunan parsiel z terhadap y dititik (x_1, y_1, z_1) pada kurva $z = F(x,y)$ ditulis dengan

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{(x_1,y_1)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_1, y_1 + \Delta y) - F(x_1,y_1)}{\Delta y}$$

$\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_{(x_1, y_1)}$ menyatakan arah garis singgung dititik (x_1, y_1, z_1) pada kurva

$z = F(x_1, y)$ (lihat gambar 11)

Jika (x_1, y_1) adalah titik-titik berubah pada kurva $z = F(x, y)$ maka x_1, y_1 dapat kita ganti dengan x, y, sehingga turunan parsiel z terhadap x dengan menganggap y tetap menjadi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

dan turunan parsiel z terhadap y dengan menganggap x tetap ditulis

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \cdot \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dapat ditulis dengan z_x dan z_y atau F_x dan F_y

Contoh-contoh :

1. Diketahui : $z = x^2 + y^2 - 3$
   $x = x_1 = -1$ dan
   $y = y_1 = 3$

   Hitung $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dititik (–1, 3)

   $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dititik (–1, 3)

Jawab : Untuk $x_1 = -1$

$$z = y^2 - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{(-1.3)} = 2.3 = 6$$

Untuk $y_1 = 3$

$$z = x^2 + 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{(-1.3)} = 2.(-1) = -2$$

2. $$z = x^2 + y^2 + 3yx$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 3x$$

3. $$z = \sin (2x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos (2x + 3y) \,.\, 2 = 2 \cos (2x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos (2x + 3y) \,.\, 3 = 3 \cos (2x + 3y)$$

4. $$z = e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2y} \,.\, 2xy = 2xy\ e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2y} \,.\, x^2 = x^2\ e^{x^2y}$$

5. $z = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + y}$$

6. $z = (x^2 + y^2) \text{ arc tan } \frac{x^2}{y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{ . arc tan } \frac{x^2}{y^2} + (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \frac{x^4}{y^4}} \cdot \frac{2x}{y^2}$$

$$= 2x \text{ arc tan } \frac{x^2}{y^2} + \frac{(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4} \text{ . } 2\, xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \text{ arc tan . } \frac{x^2}{y^2} + (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^4}{y^4}} \cdot \frac{-2x^2}{y^3}$$

$$= 2y \text{ arc tan } \frac{x^2}{y^2} - \left(\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}\right) 2x^2y$$

7. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \text{........} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \text{..........}$$

Jawab : $2x + 6\, z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3z} \text{ dan}$$

$$4y + 6z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z}$$

3.4. DIFFERENSIAL TOTAL

Dalam bentuk turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$, perubahan Δx dan Δy ditinjau berasingan.

Sekarang tinjau perubahan x dan y secara bersama-sama.

Misal (x,y) titik dalam domain D dan $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ titik lain dalam D juga, maka z berubah sebesar Δz berawal dari titik (x, y) sampai $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

sebesar :

$$\Delta Z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad \text{................ (3.4.1)}$$

Pernyataan (4.1) menyatakan Δz sebagai fungsi dari Δx dan Δy, x dan y dianggap tetap, dengan sifat khusus.

$$\Delta Z = 0 \text{ Jika } \Delta x = 0 \text{ dan } \Delta y = 0 \qquad \text{................ (3.4.2)}$$

Contoh :

1. $z = x^2 + xy + y^2$

$$z + \Delta z = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2$$
$$= x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y + y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2$$

Setelah dikurangi didapat

$$\Delta z = \Delta x\,(2x + y) + \Delta y\,(x + 2y) + \Delta x\,\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$$
$$= \Delta x.\, a + \Delta y\,.\, b + c\,\Delta x\,\Delta y + d\,\Delta x^2 + e\,\Delta y^2.$$

Jika Δz merupakan fungsi dari Δx dan Δy.

Umumnya : fungsi z = F(x,y) dikatakan mempunyai differensial total di titik (x,y) jika di titik tersebut, Δz dapat ditulis sebagai :

$$\Delta z = a\,\Delta x + b\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y \qquad \text{................ (3.4.3)}$$

dengan a, b tidak tergantung pada Δx dan Δy dan ε_1, ε_2 adalah fungsi-fungsi dari Δx dan Δy sehingga.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0\,, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_z = 0$$

Bentuk linier dari Δx dan Δy :

a. Δx + b. Δy. disebut differensial total dari z di titik (x,y) dinyatakan dengan dz dimana

$$dz = a\ dx + b\ dy \qquad \text{..............} \quad (3.4.4)$$

Jika Δx dan Δy cukup kecil, nilai Δz mendekati dz.

Dari (3.4.3)

$$\Delta z = \Delta x\ (a + \varepsilon_1) + \Delta y\ (b + \varepsilon_2)$$

Penggantian ε_1 dan ε_2 dengan 0 (nol) tidak mengakibatkan kesalahan berarti, jika Δx dan Δy diambil cukup kecil.

Dalil :

Jika z = F (x,y) mempunyai differensial di titik (x, y), maka

$$a = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ dan } b = \frac{\partial z}{\partial y}\text{, adalah}$$

kedua turunan parsial di titik (x, y)

Bukti :

Tentukan $\Delta y = 0$, karena y tetap

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \varepsilon_1)\ \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim\ (a + \varepsilon_1) = a$$

Analoog dapat ditunjukkan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = b$$

Terdapatnya turunan parsial di titik (x, y) tidak menjamin adanya differensial total, tetapi kontinuitas di sekian titik tersebut cukup memberi jaminan.

Lemma :

Jika z = F (x, y) mempunyai turunan parsiel pertama yang kontinu di D. maka z mempunyai differensial total.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dz + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ di setiap}$$

titik (x,y) dari D.

Untuk fungsi dari 3 variabel atau lebih.

misal :

$\omega = F(x, y, u, v)$ maka ....

$$d\omega = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial u} du + \frac{\partial \omega}{\partial v} dv$$

Contoh :

4.41 $\omega = \frac{xy}{z}$, maka,

$$d\omega = \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz$$

4.4.2 $\omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$d\omega = {}^1/_2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2x\, dx + {}^1/_2 (x^2 + y^2 + z)^{-1/2} . 2ydy + {}^1/_2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2z\, dz$$

$$d\omega = \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4.4.3. $z = e^{x/y}$

$$dz = e^{x/y} \frac{1}{y} dx + e^{x/y} (-\frac{x}{y^2}) dy$$

$$= (\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy) e^{x/y}$$

4.4.4. $z = \arcsin (x^2y^3 - x^3y^2)$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2y^3 - x^3y^2)^2}} (2xy^3 - 3x^2y^2) dx + \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2y^3 - x^3y^2)^2}} (3x^2y^2 - 2x^3y) dy$$

3.5. DIFFERENSIAL FUNGSI DARI FUNGSI

Fungsi berikut yang akan ditinjau didefinisikan dalam domain tertentu dan mempunyai turunan parsiel pertama yang kontinu, sehingga turunannya dapat bentuk

Dalil :

Jika $z = F(x,y)$ dimana $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

Dalil :

Jika $z = F(x,y)$ dimana $x = f(u,v)$ dan $y = g(u,v)$, maka

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

Pada umumnya : Jika $\alpha = F\ (x, y, z, \ldots\ldots)$
dimana

$x = f\ (u, v, w, \ldots\ldots)$
$y = g\ (x, v, w, \ldots\ldots)$
$z = h\ (u, v, w, \ldots\ldots)$ maka

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial v} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial w} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,\frac{\partial t}{\partial w} + \ldots\ldots$$

.

.

.

dst

Catatan :

1. $z = F(x, y)$ dengan $x = f(t)$, $y = g(t)$
   maka dapat ditulis
   $Z = F\{f(t), g(t)\}$ ......

2. $z = F(x, y)$ dengan $x = f(u, v)$ dan
   $y = g(u, v)$

   maka dapat ditulis
   $z = F\{f(u,v), g(u,v)\}$

   Kedua catatan di atas disebut juga turunan fungsi atas fungsi

3.6. FUNGSI IMPLISIT, INVERS, JACOBIAN

Bentuk fungsi implisit

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \text{........... (3.6.1)}$$

Dari bentuk ini z bisa dinyatakan sebagai fungsi dari x, y

ditulis : $z = F(x,y)$ .... (3.6.2)

misal :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ maka

$z = +\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$ atau

$z = -\sqrt{(4 - x^2 - y^2)}$

Jika ada 2 bentuk fungsi implisit

$$\begin{cases} F(x, y, z, w) = 0 \\ G(x, y, z, w) = 0 \end{cases} \qquad \text{........... (3.6.3)}$$

maka kita dapat menyelesaikan kedua persamaan (3.6.3) menjadi

$z = f(x,y)$

$\omega = g(x,y)$

Jika ada 3 bentuk fungsi implisit

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases} \qquad \text{............ (3.6.4)}$$

maka kita dapat menyelesaikan ketiga persamaan menjadi

$$x = f(u, v)$$
$$y = g(u, v)$$
$$z = h(u, v)$$

Pada umumnya jika ada m persamaan dalam n buah variabel dengan m < n, maka kita mungkin dapat memecahkan m persamaan sebagai fungsi dari (n–m) variabel lainnya.

Jumlah variabel bebas sama dengan banyaknya persamaan.

Dari persamaan (1.6.4) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{cases} F\,[f,(u,v),\ g(u,v),\ h(u,v),\ u,\ v] = 0 \\ G\,[f(u,v),\ g(u,v),\ h(u,v),\ u,\ v] = 0 \\ H\,[f(u,v),\ g(u,v),\ h(u,v),\ u,\ v] = 0 \end{cases}$$

Differensial total dari fungsi-fungsi di atas sama dengan nol, maka

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_u\,du + F_v\,dv = 0$$
$$G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz + G_u\,du + G_v\,dv = 0$$
$$H_x\,dx + G_y\,dy + H_z\,dz + H_u\,du + H_v\,dv = 0$$

dx, dy dan dz dapat dinyatakan dalam du dan dv, sebagai berikut

$$dx = -\frac{p}{D}\,du - \frac{q}{D}\,dv$$

$$dy = -\frac{r}{D}\,du - \frac{s}{D}\,dv$$

$$dz = -\frac{m}{D}\,du - \frac{n}{D}\,dv$$

dimana

$$D = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$p = \begin{vmatrix} F_u & F_y & F_z \\ G_u & G_y & G_z \\ H_u & H_y & H_z \end{vmatrix} \qquad q = \begin{vmatrix} F_v & F_y & F_z \\ G_v & G_y & G_z \\ H_v & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$r = \begin{vmatrix} F_x & F_u & F_z \\ G_x & G_u & G_z \\ H_x & H_u & H_z \end{vmatrix} ; \qquad s = \begin{vmatrix} F_x & F_v & F_z \\ G_x & G_v & G_z \\ H_z & H_v & H_z \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_u \\ F_x & G_y & G_u \\ H_x & H_y & H_u \end{vmatrix} ; \qquad n = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_v \\ G_x & G_y & G_v \\ H_x & H_y & H_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y & F_z \\ G_u & G_y & G_z \\ H_u & H_y & H_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}} ; \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_u & F_z \\ G_x & G_u & G_z \\ H_x & H_u & H_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}} ; \ldots\ldots$$

Determinan D di sini dibentuk oleh turunan parsiel dari 3 fungsi yang merupakan variabel Determinan semacam ini disebut determinan Jacobian, yang ditulis sebagai

$$\frac{\partial\ (F, G, H)}{\partial\ (x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ F_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.6.5)$$

(3.6.5) dibaca lengkapnya sebagai determinan Jacobian dari F, G, H atas x, y, z, maka persamaan (3.6.4) dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\partial x}{\partial u} = - \frac{\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, y, z)}}{\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}} ; \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, u, z)}}{\dfrac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}}$$

Dari pernyataan di atas, kita dapat simpulkan :

1. Jika terdapat 1 persamaan dengan 2 variabel

   $$F\ (x, y) = 0 \text{ maka } \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

2. Jika terdapat 1 persamaan dengan 3 variabel

   F (x, y, z) = 0 maka

   $$\frac{dz}{dx} = - \frac{F_x}{F_z} \text{ dan } \frac{dz}{dy} = - \frac{F_y}{F_z}$$

3. Jika terdapat 2 persamaan dengan 3 variabel.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ maka}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

$$\text{dengan } \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$$

4. Jika terdapat 2 persamaan dengan 4 variabel

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0 \\ G(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \qquad \text{maka}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(t, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, t)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}$$

Contoh :

3.6.1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a \\ x + y + z + t = b,\ a, b = \text{tetap} \end{cases}$

Tentukan $\dfrac{\partial x}{\partial z}$, $\dfrac{\partial x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ dan $\dfrac{\partial y}{\partial t}$

Dapat diselesaikan dengan 2 cara

Cara I (Pakai rumus)

$F = x^2 + y + z^2 + t^2 - a$
$G = x + y + z + t - b$

$F_x = 2x \quad ; \quad F_y = 2y \quad ; \quad F_z = 2z \quad ; \quad F_t = 2t$

$G_x = 1 \quad ; \quad G_y = 1 \quad ; \quad G_z = 1 \quad ; \quad G_t = 1$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} F_z & F_y \\ G_z & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2z & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2z - 2y}{2x - 2y} = \frac{y - z}{x - y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_t \\ G_x & G_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2t \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{2x - 2t}{2x - 2y} = \frac{t - x}{x - y}$$

$\dfrac{\partial x}{\partial t}$ dan $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ Cari sendiri !

Cara II

Differensial parsial x, y terhadap t dari ke z persamaan untuk mencari

$$\frac{\partial x}{\partial t} \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$2x \frac{\partial x}{\partial t} + 2y \frac{\partial y}{\partial t} + 2t = 0$$

$$1 \frac{\partial x}{\partial t} + 1 \frac{\partial y}{\partial t} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} -2t & 2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2y - 2t}{2x - 2y} = \frac{y - t}{x - y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -2t \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2t - 2x}{2x - 2y} = \frac{t - x}{x - y}$$

Untuk mencari $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ dan $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ coba sendiri !

3.6.2. $xy + xz + yz = 5$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \ldots\ldots \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots\ldots \; ?$$

$$y + x\frac{\partial z}{\partial x} + z + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} = -(y + z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y + z)}{x + y}$$

$$x + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

$$(x + y)\frac{\partial z}{\partial y} = -(x + z)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + z}{x + y}$$

3.6.3. $x = e^{2r}\cos\theta$
$y = e^{2r}\sin\theta$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots; \; \frac{\partial r}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots; \; \frac{\partial \theta}{\partial x} = \ldots\ldots; \; \frac{\partial \theta}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots$$

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\sin\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = 2e^{2r}\sin\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -e^{2r}\sin\theta \\ 0 & e^{2r}\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{2r}\cos\theta & -e^{2r}\sin\theta \\ 2e^{2r}\sin\theta & e^{2r}\cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{e^{2r}\cos\theta}{2e^{4r}\cos^2\theta + 2e^{4r}\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos \theta}{2e^{2r}}$$

$$0 = 2e^{2r} \cos \theta \frac{dr}{dy} - e^{2r} \sin \theta \frac{d\theta}{dy}$$

$$1 = 2e^{2r} \sin \theta \frac{dr}{dy} + e^{2r} \cos \theta \frac{d\theta}{dy}$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{e^{2r} \sin \theta}{2e^{4r}} = \frac{\sin \theta}{2e^{2r}}$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{2e^{2r} \cos \theta}{2e^{4r}} = -\frac{\cos \theta}{e^{2r}} \text{ dan}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-2e^{2r} \sin \theta}{2e^{4r}} = -\frac{\sin \theta}{e^{2r}}$$

Soal-soal :

1. Tentukan $\frac{dz}{dx}$ dan $\frac{dz}{dy}$ dari

   (a) $z = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}$

   (b) $z = x^3 + 3x^2y + 3x^2y + y^3$

   (c) $z = \cos 3x \sin 4y$

   (d) $z = \text{arc cotg } \frac{x}{y}$

   (e) $z^3 - 3xy^2 + 6xyz = 0$

2. (a) Jika $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; tunjukkan $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = z$

   (b) Jika $z = \ln (x^2 + y^2)^{1/2}$; tunjukkan $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 1$

   (c) Jika $z = e^{x/y} \sin \frac{x}{y} + e^{y/x} \cos \frac{y}{x}$, tunjukkan

   $$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0$$

(d) Jika $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \sin(ax + by)$

tunjukkan : $b \dfrac{dz}{dx} = a \dfrac{dz}{dy}$

3. Tentukan persamaan garis singgung

(a) pada Parabola $z = 2x^2 - 3y^2$, $y = 1$ pada titik $(-2,1,5)$
(b) pada Hyperbola $z = 2x^2 - 3y^2$, $z = 5$ pada titik $(-2,1,5)$

4. Tentukan differensial total dari

(a) $z = xy^3 + 2x^3y$

(b) $\theta = \text{arc tan } \dfrac{x}{y}$

(c) $z = e^{x^2-y^2}$

(d) $z = x\,(x^2 + y^2)^{-1/2}$

5. (a) $\left.\begin{array}{l} u = x^3 y^2 \\ x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{array}\right\}$ Tentukan $\dfrac{dx}{dt} = \ldots\ldots$

(b) $u = x \cos y + y \sin x$
$x = \cos 2t$
$y = \sin 2t$

Tentukan $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

(c) Tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ dari

$z = x^2 - 2y^3$
$x = 3s + 2t$
$y = 2s - 3t$

(d) Juga untuk $z = x^2 + 2y^2$
$x = \sin s + \cos t$
$y = \cos s - \sin t$

(e) $z = \sin(4x + 5y)$
$x = s + t$
$y = s - t$

(f) $z = e^{xy}$
$x = s^2 + 2st$
$y = t^2 + 2st$

(6) Jika $u = f(x, y)$
$x = r \cos \theta$
$y = r \sin \theta$

Tunjukkan :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(7) Jika $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$

Tunjukkan :

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = nz$$

3.7. TURUNAN PARSIAL ORDER TINGGI

Turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ dari $z = F(x, y)$ boleh diteruskan turunan parsialnya terhadap x dan y menjadi turunan kedua

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F_{xx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = F_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Juga $\frac{\partial z}{\partial y}$ bisa didapatkan turunan kedua terhadap y dan x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = F_{yy} \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = F_{xy}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Jika z = F(x, y) dan turunan parsielnya kontinu maka berlaku

$$\frac{\partial^2 z}{dx\ dy} = \frac{\partial^2 z}{dy\ dx}$$

Contoh :

1. $z = x^3 + 3xy^2 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6xy + 3y^2) = 6x + 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6xy + 3y^2) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3y^2) = 6y$$

2. $z = x \sin y - y \cos x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y + y \sin x \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y - \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y + y \sin x) = + y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x \cos y - \cos x) = -x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y - \cos x)$$

$$= \cos y + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y + y \sin x)$$

$$= \cos y + \sin x$$

Soal :

8. Cari untuk fungsi-fungsi di bawah ini

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

(a) $z = 5x^2 - 2xy + y^2$

(b) $z = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x}{y^2}$

(c) $z = \sin 3x \cos 4y$

(d) $z = \arccos \dfrac{x}{y}$

9 (a) Jika $z = \dfrac{xy}{x - y}$, tunjukkan $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(b) Jika $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ dan $\beta = \pm \alpha$, tunjukkan bahwa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(c) Jika $z = e^{-t} (\sin x + \cos y)$, tunjukkan bahwa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

(d) Jika $z = \sin ax \sin by \sin kt \sqrt{a^2 + b^2}$ tunjukkan bahwa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\}$$